

Nenewtonské tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

—

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

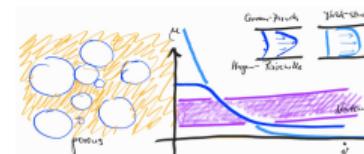
Selected

Two aspects

Využití nenewtonských tekutin pro určení velikosti pórů v okolí injektovaného vrtu

Martin Lanzendörfer, Jiří Mls
joint work with J. Najser, J. Roháč, S. Safari, M. Slavík, T. Weiss

Přírodovědecká fakulta Univerzity Karlovy, ÚHIGUG
Praha



Supported by Czech Science Foundation
project GA21-27291S (years 2021-2023).



Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonske tekutiny

Nenewtonska porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

I. (Nenewtonske) pseudoplastické (shear-thinning) tekutiny

Pseudoplastické (shear-thinning) tekutiny.

Močinný (power-law) model.

Hagenovo–Poiseuillovo proudění.

...v hydrogeologii.

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Nenewtonské tekutiny

Newtonská (nestlačitelná) tekutina

jako je voda, je charakterizována konstitučními vztahy

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad \operatorname{tr}\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

μ dynamická viskozita, $\mu > 0$

p , \mathbf{v} tlak, rychlosť

\mathbf{T} , \mathbf{I} , \mathbf{D} Cauchyho tenzor napětí, jednotkový tenzor, symetrická část gradientu rychlosti

Nenewtonské tekutiny

Newtonská (nestlačitelná) tekutina

jako je voda, je charakterizována konstitučními vztahy

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad \operatorname{tr}\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

μ dynamická viskozita, $\mu > 0$

p , \mathbf{v} tlak, rychlosť

\mathbf{T} , \mathbf{I} , \mathbf{D} Cauchyho tenzor napětí, jednotkový tenzor, symetrická část gradientu rychlosti

Newtonské tekutiny

jsou *všechny ostatní*, a těch je mnoho...

- ▶ die swelling (Barus effect), delayed die swelling
- ▶ rod climbing (Weissenberg effect)
- ▶ memory effects, creep, yield stress, viscoelastic effects
- ▶ ketchup, toothpaste, pitch (tar), liquid armor (kevlar), dry granular flows, ...

Nenewtonské tekutiny

Newtonská (nestlačitelná) tekutina

jako je voda, je charakterizována konstitučními vztahy

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad \operatorname{tr}\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

μ dynamická viskozita, $\mu > 0$

p , \mathbf{v} tlak, rychlosť

\mathbf{T} , \mathbf{I} , \mathbf{D} Cauchyho tenzor napětí, jednotkový tenzor, symetrická část gradientu rychlosti

Pseudoplastické (shear-thinning) / dilatantní (shear-thickening) tekutiny

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu(|\mathbf{D}|)\mathbf{D}, \quad \operatorname{tr}\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

μ dynamická viskozita, $\mu = \mu(|\mathbf{D}|)$

klesající: pseudoplastická (shear-thinning)

Nenewtonské tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Pseudoplastické tekutiny, mocninný model



Nenewtonské tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svažků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Pseudoplastické tekutiny, mocninný model

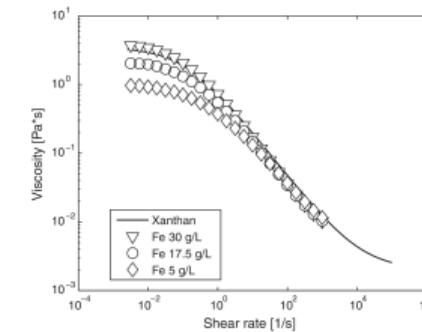


Fig. 3. Viscosity of NZVI-xanthan suspensions as a function of the shear rate. Since a replication was performed for every sample, the results were reported as the average of the two experiments.

Převzato od Comba, S.; Dalmazzo, D.; Santagaa, E.; Sethi, R. (2011, J. Hazard. Mater.)

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

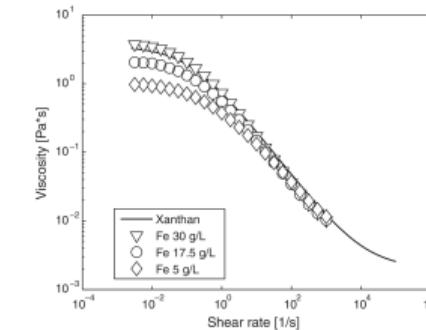


Fig. 3. Viscosity of NZVI-xanthan suspensions as a function of the shear rate. Since a replication was performed for every sample, the results were reported as the average of the two experiments.

Převzato od Comba, S.; Dalmazzo, D.; Santagaa, E.; Sethi, R. (2011, J. Hazard. Mater.)

Mnoho různých vzorečků

nejčastěji navržených chemiky, např.

► Ostwald-de Waele *mocninný* (power-law) model tekutiny

$$\mu = \mu_K |\mathbf{D}|^{n-1}, \quad 0 < n < 1$$

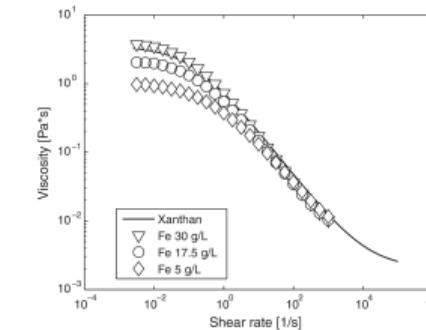


Fig. 3. Viscosity of NZVI-xanthan suspensions as a function of the shear rate. Since a replication was performed for every sample, the results were reported as the average of the two experiments.

Převzato od Comba, S.; Dalmazzo, D.; Santagaa, E.; Sethi, R. (2011, J. Hazard. Mater.)

Mnoho různých vzorečků

nejčastěji navržených chemiky, např.

► Ostwald–de Waele *mocninný* (power-law) model tekutiny

$$\mu = \mu_K |\mathbf{D}|^{n-1}, \quad 0 < n < 1$$

► Cross model, or Carreau–Yasuda model

$$\mu = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + \alpha |\mathbf{D}|^m}, \quad \text{or} \quad \mu = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{(1 + \alpha |\mathbf{D}|^2)^{m/2}}$$

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo–Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svažků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonske tekutiny

Nenewtonska porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Hagenovo–Poiseuilleovo jednoduché proudění

Ustálené laminární proudění v kapiláře (v trubičce):

pro Newtonskou tekutinu

$$Q_R = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| \quad \Rightarrow \quad k_R = \frac{\phi_e}{8} R^2.$$

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Hagenovo–Poiseuilleovo jednoduché proudění

Ustálené laminární proudění v kapiláře (v trubičce):

pro Newtonskou tekutinu

$$Q_R = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| \quad \Rightarrow \quad k_R = \frac{\phi_e}{8} R^2.$$

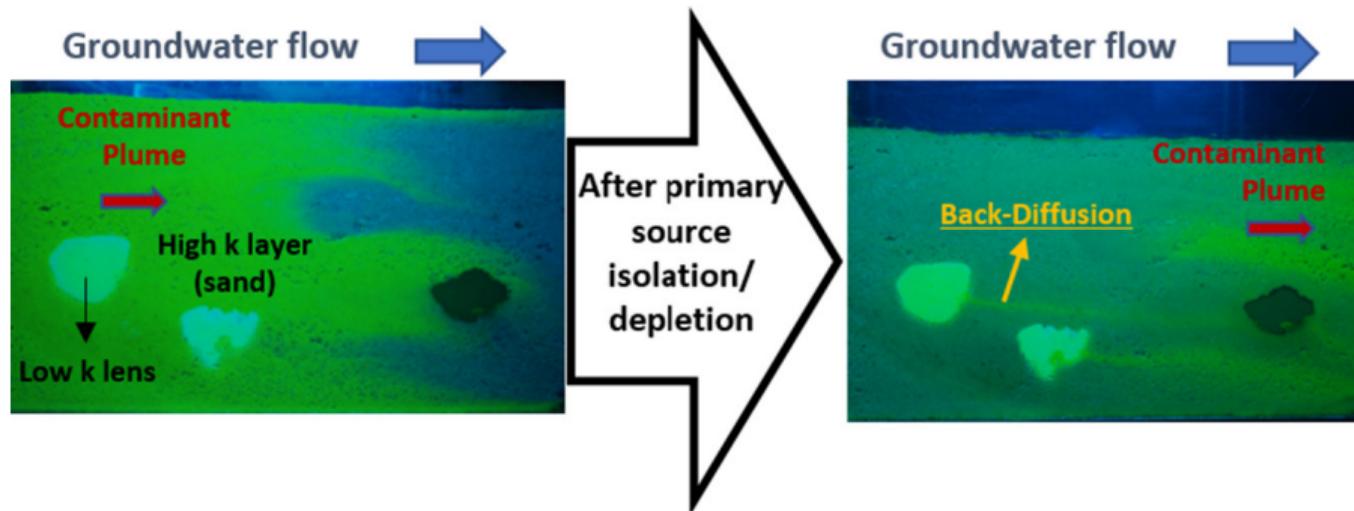
pro power-law tekutinu:

(připomeňme: $\mu = \mu_K |\mathbf{D}|^{n-1}$, $0 < n < 1$)

$$Q_R = C_{(n, \eta_K)} R^{1+\frac{1}{n}} \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right|^{\frac{1}{n}} \quad \Rightarrow \quad k_R \equiv R^{1+\frac{1}{n}}.$$

Pseudoplastické tekutiny v praxi

Navýšení efektivnosti remediacie heterogenního prostředí (zón snížené propustnosti).



F. Tatti et al. (2018) in Science of The Total Environment.

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonske tekutiny

Nenewtonska porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

II. Model kapilárních trubiček

**Tok = součet toků.
... & nenewtonske tekutiny.**

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonske tekutiny

Nenewtonska porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

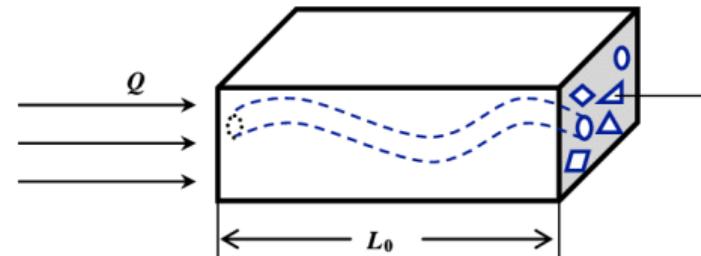
Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Koncept svazků kapilár



Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svažků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonske tekutiny

Nenewtonska porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

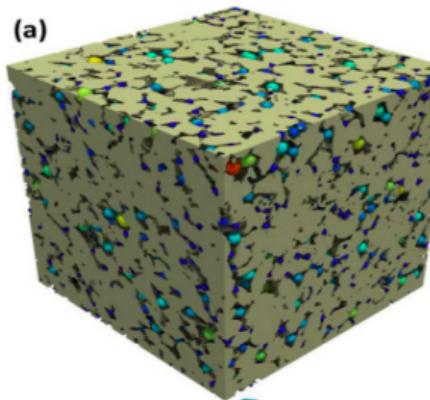
Selected

Two aspects

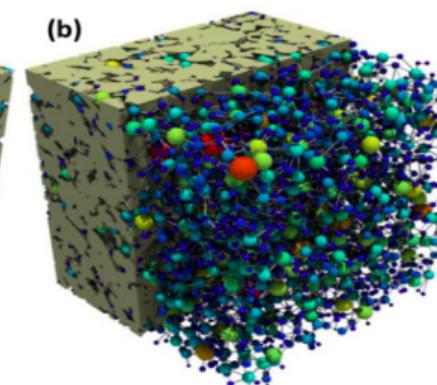
Přesnější model? Vycházet z mikroměřítka?

Pore network modelling

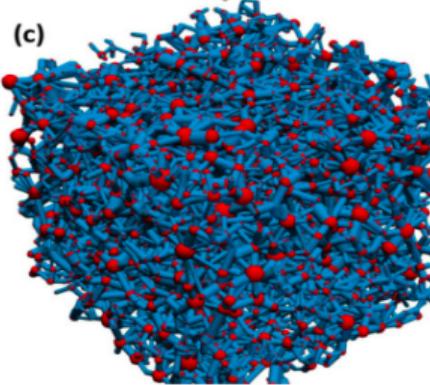
(a)



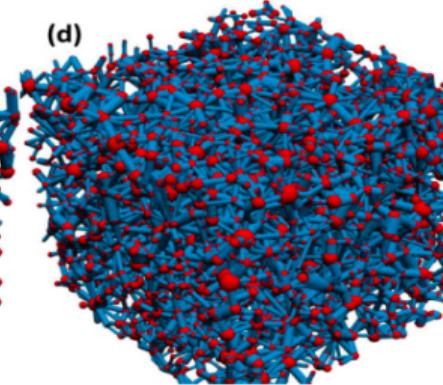
(b)



(c)



(d)



Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svažků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonske tekutiny

Nenewtonska porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Major issues in subsurface hydrology...

... are all related to

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svažků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonske tekutiny

Nenewtonska porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Přesnější model? Vycházet z mikroměřítka?

Major issues in subsurface hydrology...

... are all related to



DATA.

Koncept svazků kapilár

Rozdělení efektivní velikosti pórů

Kapilární trubičky různých poloměrů (zde bez tortuozity, $\tau = 1$),

$$v \approx \sum_{i=1}^N w_i q(R_i), \quad \text{kde } \sum_{i=1}^N w_i = \phi_e < 1,$$

$$\text{nebo lépe} \quad = \int_0^1 w(R) q(R) dR \quad \text{kde } \int_0^1 w(R) dR = \phi_e < 1.$$

Koncept svazků kapilár

Rozdělení efektivní velikosti pórů

Kapilární trubičky různých poloměrů (zde bez tortuozity, $\tau = 1$),

$$v \approx \sum_{i=1}^N w_i q(R_i), \quad \text{kde } \sum_{i=1}^N w_i = \phi_e < 1,$$

$$\text{nebo lépe} \quad = \int_0^1 w(R) q(R) dR \quad \text{kde } \int_0^1 w(R) dR = \phi_e < 1.$$

Nepříliš významné v případě Newtonských tekutin...

Všimněte si, že (pro $\tau = 1$):

$$k = \frac{\pi}{8} \sum_{i=1}^N w_i R_i^2 = \frac{\phi_e}{8} \frac{\sum_i w_i R_i^2}{\sum_i w_i} = \frac{\phi_e}{8} \bar{R}^2, \quad \text{kde } \bar{R}^2 = \frac{\sum_i w_i R_i^2}{\sum_i w_i}.$$

Koncept svazků kapilár pro nenewtonské tekutiny

Rozdělení efektivní velikosti pórů

Celkový objemový tok v je součtem dílčích toků, odpovídajících svazkům kapilár různých velikostí:

$$v(\nabla P, c) \approx \sum_{i=1}^N w_i q(\nabla P, c, R_i), \quad \text{kde } \sum_{i=1}^N w_i = \phi_e < 1,$$

$$\text{nebo lépe} \quad = \int_0^1 w(R) q(\nabla P, c, R) dR \quad \text{kde } \int_0^1 w(R) dR = \phi_e < 1,$$

přitom

$v(\nabla P, c)$... celkový objemový tok

∇P ... gradient (celkového) tlaku

c ... jakýkoliv parameter charakterizující rheologii tekutiny,
e.g. zde koncentrace vodného roztoku xanthanu

Koncept svazků kapilár pro nenewtonské tekutiny

Rozdělení efektivní velikosti pórů

Celkový objemový tok v je součtem dílčích toků, odpovídajících svazkům kapilár různých velikostí:

$$v(\nabla P, c) \approx \sum_{i=1}^N w_i q(\nabla P, c, R_i), \quad \text{kde } \sum_{i=1}^N w_i = \phi_e < 1,$$

$$\text{nebo lépe} \quad = \int_0^1 w(R) q(\nabla P, c, R) dR \quad \text{kde } \int_0^1 w(R) dR = \phi_e < 1,$$

přitom

$v(\nabla P, c)$... celkový objemový tok

∇P ... gradient (celkového) tlaku

c ... jakýkoliv parameter charakterizující rheologii tekutiny,
e.g. zde koncentrace vodného roztoku xanthanu

kde navíc

R, R_i ... efektivní velikost pórů (poloměr kapilár), \Rightarrow

$w(R), w_i$... jím příslušné váhy (frekvence) \Rightarrow rozložení efektivní velikosti pórů

$q(\nabla P, c, R)$... dílčí objemový tok,

odpovídající nenewtonovské tekutině c při velikosti pórů R .

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonske tekutiny

Nenewtonska porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

III. Nenewtonská porozimetrie

Inverzní úloha.

Nedávné metody: YSM a ANA.

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Nenewtonské tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svažků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrice

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Inverzní úloha

Inverzní úloha hledání rozložení efektivní velikosti pórů

- ▶ Na základě předpokladu, že pro dané $q(\nabla P, c, R)$ platí,

$$v(\nabla P, c) = \int_0^1 w(R) q(\nabla P, c, R) dr,$$

- ▶ hledáme $w(R)$ odpovídající experimentálně naměřeným $v = v(\nabla P, c)$.

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Inverzní úloha

Metody numerické porozimetrie

V kontextu měření rozložení velikosti pórů, tento koncept před lety vedl k zavedení **yield stress fluid** metody (YSM) a později (nezávisle) **ANA method**, viz:

- ▶ Hauswirth S.C., Abou Najm M.R., Miller C.T. (2019) *Water Resour. Res.* 55(8), 7182-7195
- ▶ Abou Najm M.R., Atallah N.M. (2016) *Vadose Zone J.* 15(9)
- ▶ Rodriguez de Castro A., et al. (2020) *Comp. Chem. Eng.* 133, 106662

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonske tekutiny

Nenewtonska porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

IV. Radiální proudění v okolí injektovaného vrtu

Vzdálený cíl: praktické metody měření.
Blízký pokrok: ustálené proudění v napjatém režimu.
Numerické experimenty.
(...rozdělaná práce...)

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svažků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Radial flows

Far away goal

Check the **possibility**, whether the concept can be used for borehole testing **in the future**.

- ▶ There is **no such *in-situ* measurement technique.**
- ▶ Could be used for stratified sediments?
- ▶ Could be used for borehole clogging tests?

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Radial flows

Far away goal

Check the **possibility**, whether the concept can be used for borehole testing **in the future**.

- ▶ There is **no such *in-situ* measurement technique**.
- ▶ Could be used for stratified sediments?
- ▶ Could be used for borehole clogging tests?
- ▶ Let us start slowly, by small steps...

Radial flows

Nonlinear inverse problem

In the radial flow setting, the inverse problem is less straightforward and always nonlinear. The total flux of a shear-thinning fluid is distributed into the layers differently at each r .

We only have the data for ΔP , where

$$\Delta P(Q, c) = \int_{r_1}^{r_2} \nabla P \left(\frac{Q}{2\pi r}, c \right) dr,$$

where $\nabla P(v, c)$ is itself a solution to the (nonlinear) equation:

$$v(\nabla P, c) = \sum_{i=1}^N v_i(\nabla P, c) w_i, \quad \text{with} \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1.$$

Nenewtonské tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svažků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrice

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Radial flows

Numerical artificial data

Prior to designing the laboratory (or later, field) experiments, we study the numerical experiments based on artificial data.

We define a set of injection rates Q and a set of power-law fluids parametrized by c . The porous layers will have different characteristic pore sizes, providing us with distinct relations for $v_i(\nabla P, c)$. We chose a configuration of the layered media by prescribing the values of w_i .

For each Q and c , we compute the “observed” ΔP numerically.

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svažků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrerie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Radial flows

Numerical algorithm: forward problem

- ▶ For given Q , c and $\{w_i\}_{i=1}^N$, the integral in (18) is discretized in r (log-equidistantly).
- ▶ At each r , the hydraulic gradient $\nabla P(\frac{Q}{2\pi r}, c)$ is computed numerically using the MATLAB `fzero` function.
- ▶ Additional random noise can be then added to ΔP .

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Nenewtonské tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrerie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

—

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Radial flows

Numerical algorithm: forward problem

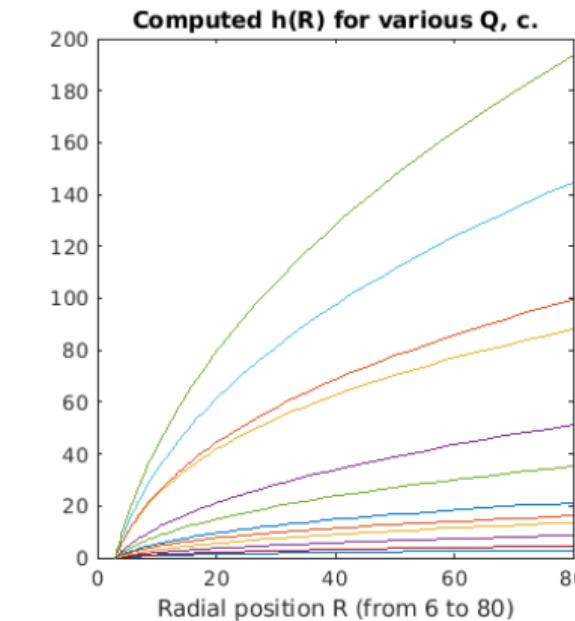
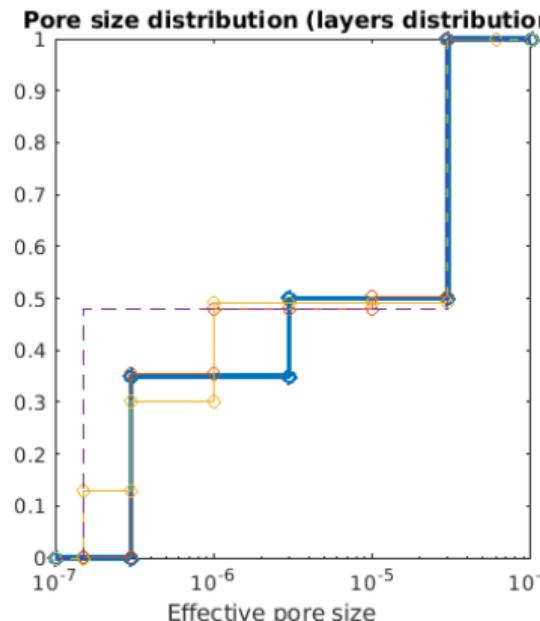
- ▶ For given Q , c and $\{w_i\}_{i=1}^N$, the integral in (18) is discretized in r (log-equidistantly).
- ▶ At each r , the hydraulic gradient $\nabla P(\frac{Q}{2\pi r}, c)$ is computed numerically using the MATLAB `fzero` function.
- ▶ Additional random noise can be then added to ΔP .

Numerical algorithm: inverse problem

- ▶ Given a set of values of $\{Q_j, c_j, \Delta P_j\}_{j=1}^M$ (now ΔP simulated, instead of measured), we seek for $\{w_i\}_{i=1}^N$ by the **nonlinear least squares** fit of the forward problem, using the MATLAB `lsqnonlin` function.

Radial flows

Numerical results illustration



Left: the original distribution of layers (blue, thick) and its reconstructions: from the exact data (red), the data with 1% (yellow) or 2% (magenta, dashed) noise. Right: the hydraulic heads $h(r)$ of the artificial dataset.

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Děkuji Vám za pozornost!

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svažků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonske tekutiny

Nenewtonska porozimetrie

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

Selected issues

Sensitivity, uniqueness & robustness

...

(work in progress)

Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Sensitivity of computed PSD to data error

For simplicity of presentation:

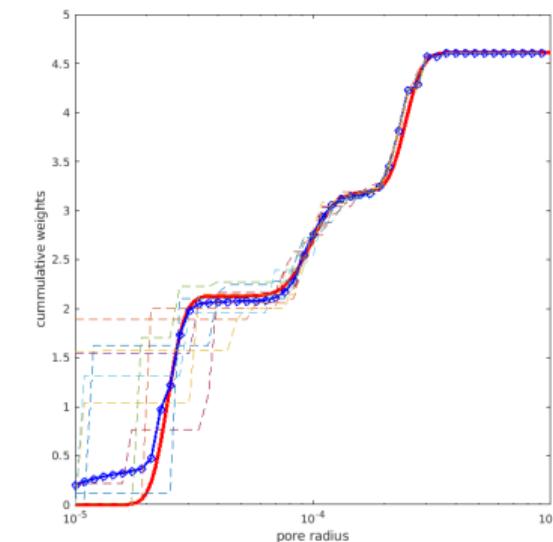
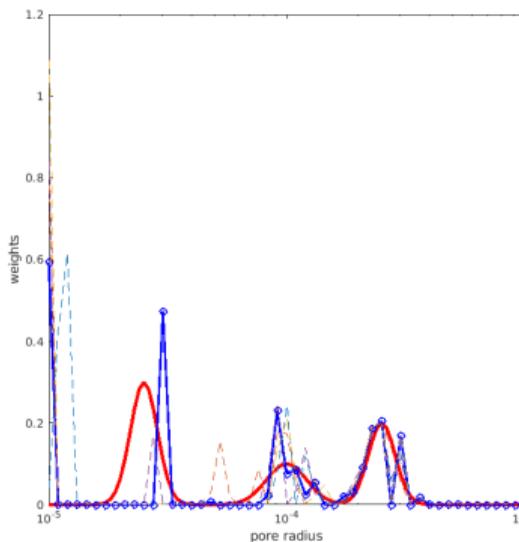
- ▶ Radii r_i given, we seek for the weights w_i .
- ▶ The algorithm is based on the one used in.¹ The least squares approximation with nonnegative weights is sought by Matlab lsqlin solver.
- ▶ The data are **very nice** (much nicer than real!):
 - ▶ artificial PSD $w(R)$ is given, with three Gaussian peaks;
 - ▶ the “measured” fluxes $v(\nabla P)$ corresponding to a **set of hydraulic gradients** ∇P are computed via the forward problem;
 - ▶ only one fluid is used, the rheology being described by Cross model, Hagen–Poiseuille flow (cylindrical capillary, no tortuosity) is computed numerically;
 - ▶ **random relative 1% noise** (normally distributed) is then added to the data.

¹Abou Najm M.R., Atallah N.M. (2016). *Vadose Zone J.* 15, 1–5.

Sensitivity of computed PSD to data error

Example 1a: basic set of data

Here the hydraulic gradients generating the data correspond to the pore radii (similarly to YSM). 50 observations and 50 radii (full red:exact; circles: without noise; dashed: 1% noise).



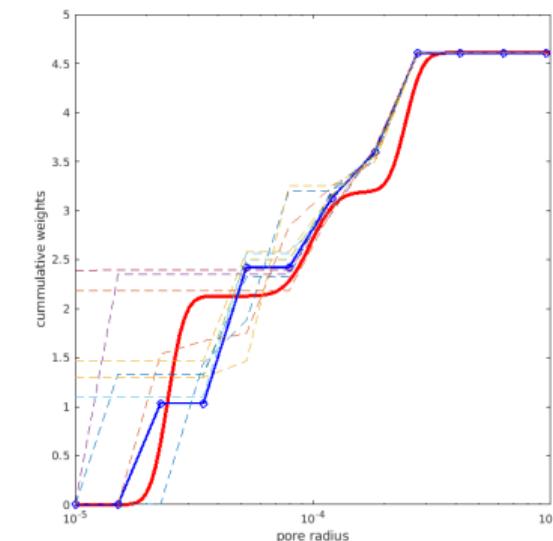
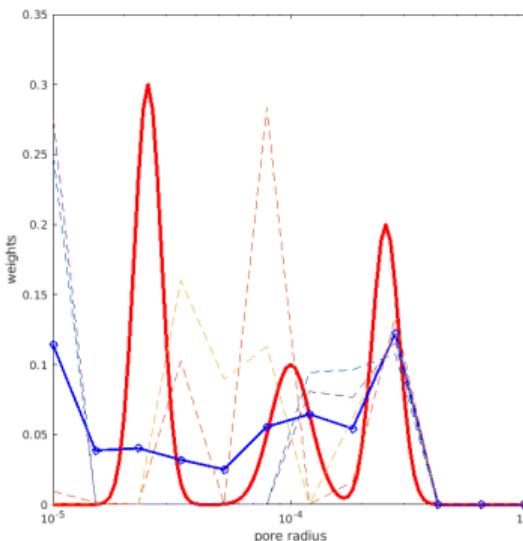
Note that the data error is only affecting the predicted radii of the small pores, but the error in cumulative weights remain low. Often, the peak is shifted to the lowest available pore size.

Errata: do not mind the vertical axis, the numbers are wrong. The LHS blue plot is also wrong.

Sensitivity of computed PSD to data error

Example 1b: basic set of data

Here the hydraulic gradients generating the data correspond to the pore radii (similarly to YSM). 12 observations and 12 radii (full red:exact; circles: without noise; dashed: 1% noise).



Similar to the previous larger problem. Again, the peak is often shifted to the left border.

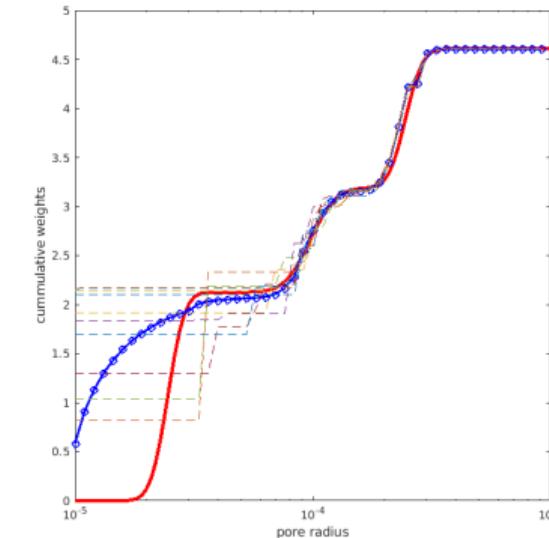
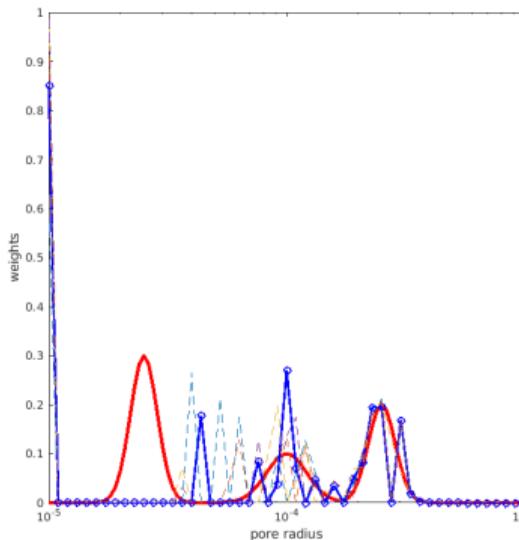
Errata: do not mind the vertical axis, the numbers are wrong. The LHS blue plot is also wrong.

Sensitivity of computed PSD to data error

Example 2a: insufficient data

Here the higher hydraulic gradients are missing from the data set.

50 observations and 50 radii (full red:exact; circles: without noise; dashed: 1% noise).



Note that the smaller pore sizes are badly resolved even with exact data, and with the noised data the error is spreading to the medium pore sizes.

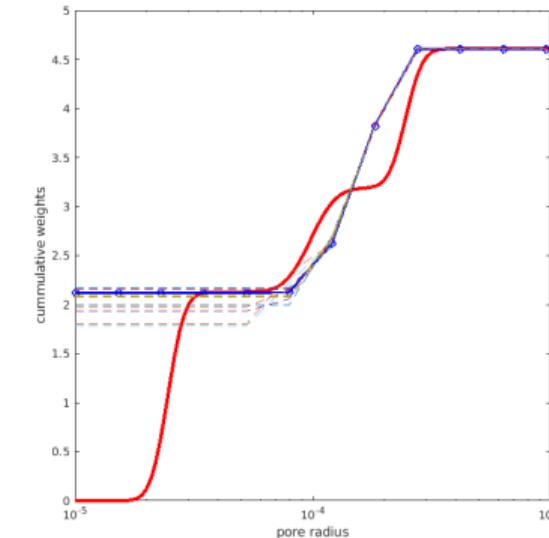
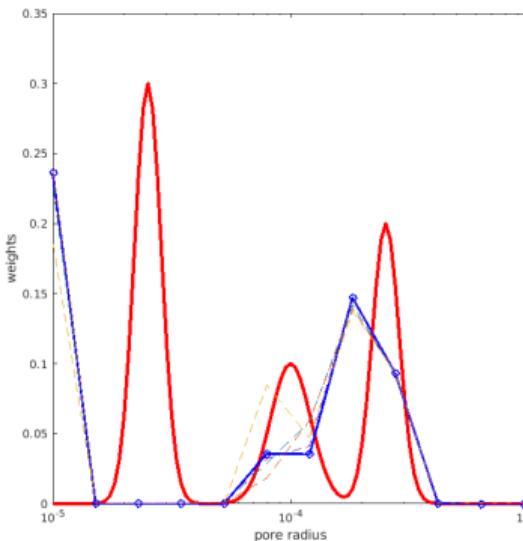
Errata: do not mind the vertical axis, the numbers are wrong. The LHS blue plot is also wrong.

Sensitivity of computed PSD to data error

Example 2b: insufficient data

Here the higher hydraulic gradients are missing from the data set.

12 observations and 12 radii (full red:exact; circles: without noise; dashed: 1% noise).



Here the left peak is shifted completely out of the border. The data set is clearly insufficient to capture the small pore sizes.

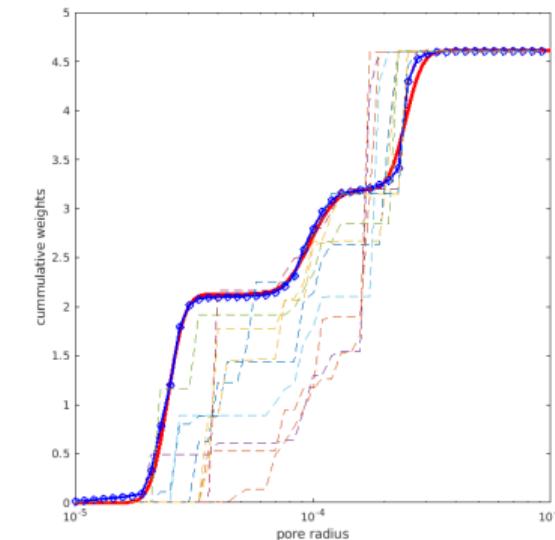
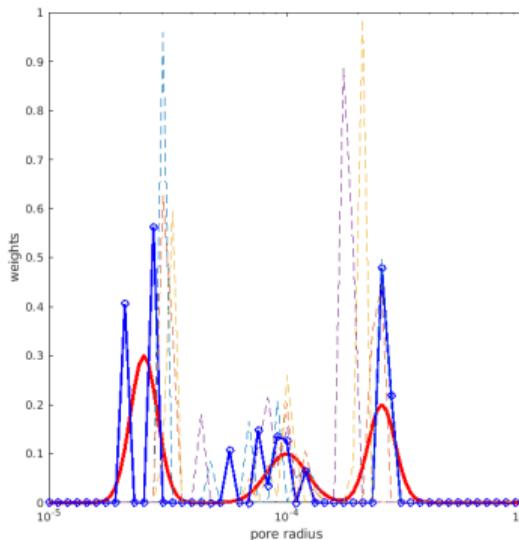
Errata: do not mind the vertical axis, the numbers are wrong. The LHS blue plot is also wrong.

Sensitivity of computed PSD to data error

Example 3a: insufficient data

Here the lower hydraulic gradients are missing from the data set.

50 observations and 50 radii (full red:exact; circles: without noise; dashed: 1% noise).



While the inversion for exact data seems perfect, the noise strongly affects the solution. Note the difference to the previous examples: here both peaks seem to be pulled to the middle.

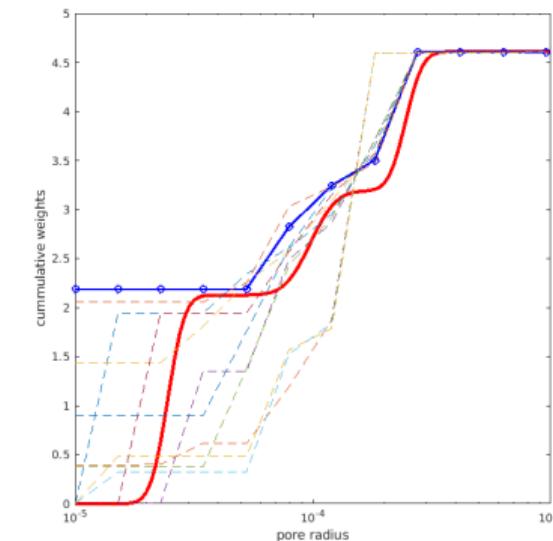
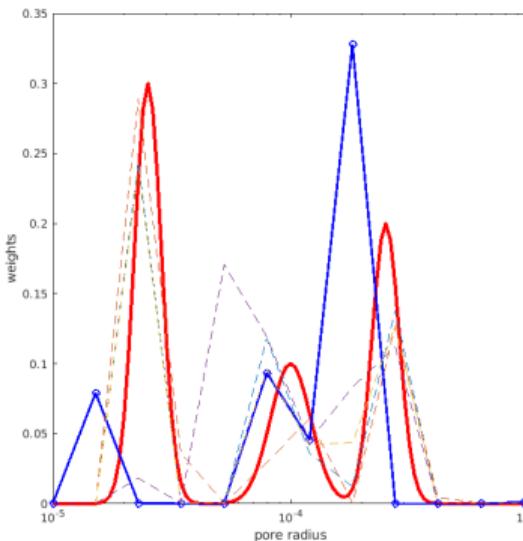
Errata: do not mind the vertical axis, the numbers are wrong. The LHS blue plot is also wrong.

Sensitivity of computed PSD to data error

Example 3b: insufficient data

Here the lower hydraulic gradients are missing from the data set.

12 observations and 12 radii (full red:exact; circles: without noise; dashed: 1% noise).



Similarly to the previous one, the inversion for exact data is not so bad except for the lowest peak shifted to the left border. Importantly, the inversion is quite sensitive to data noise.

Errata: do not mind the vertical axis, the numbers are wrong

Selected Issues

... anyone can invent *problems*, whether one has a computer or not...

General issues

- ▶ Given the experimental data,
what is the **optimal representative PSD** and the best **numerical algorithm** to reach it?
- ▶ Given the data, the algorithm and the results,
what is the **reliability** of the solution and the estimated error?
- ▶ Given a rough expectation about the pore size distribution,
how to plan the **optimal set of experiments** (polymer concentrations, pressure drops)?

Selected Issues

... anyone can invent *problems*, whether one has a computer or not... .

General issues

- ▶ Given the experimental data,
what is the **optimal representative PSD** and the best **numerical algorithm** to reach it?
- ▶ Given the data, the algorithm and the results,
what is the **reliability** of the solution and the estimated error?
- ▶ Given a rough expectation about the pore size distribution,
how to plan the **optimal set of experiments** (polymer concentrations, pressure drops)?

Let us mention yet a few more:

- ▶ How to address these questions numerically, e.g. for $q(\dots, r)$ defined numerically for more realistic pore geometries and rheologies?
- ▶ How to measure/define, the quality/error of the computed representative PSD?
- ▶ How to measure the reliability of the method?

Nenewtonske tekutiny

Pseudoplastické tekutiny

Power-law model

Hagenovo-Poiseuilleovo proudění

...aplikace

Model svazků kapilár

Přílišné zjednodušení?

Tok = suma toků

...pro nenewtonské tekutiny

Nenewtonská porozimetrice

Inverzní úloha

Metody YSM a ANA

Radiální proudění

Far away: borehole testing

Nonlinear inverse problem

Simulated problem

Numerical results

—
Appendix: issues

Sensitivity and beyond

Selected

Two aspects

Two aspects of the same inverse problem

should be distinguished in attempts to better understand the methods.

- ▶ First, the performance of the discrete inversion:

Given the data (exact or subject to random noise) that correspond to a pore size distribution with only a finite (small) N distinct pore sizes, how does different algorithms and different data sets perform in identifying this discrete pore size distribution?

- ▶ Second, the approximation of the PSD by the (discrete) representative PSD:

Given the pore size distribution that is continuous (or represented by a large number of pore sizes, e.g. the Gaussian peaks in the previous examples), what are its good approximations by small number of distinct pore sizes?

While mixed together in real applications, these aspects represent different mathematical issues.